



ASOCIAȚIA
PROFESIONIȘTILOR
COLEGIUL
NAȚIONAL
„ȘTEFAN CEL MARE”
SUCEAVA

CONCURSUL
elevilor de la
CLASELE a VIII-a
din municipiul SUCEAVA
Ediția a XXII-a
mai 2025

MUNICIPIUL
SUCEAVA
CONSILIUL
LOCAL SUCEAVA



Clasa a VIII-a

B. MATEMATICĂ

B1. Se consideră numărul $a = \sqrt{9 - 2\sqrt{14}} - \sqrt{9 + 2\sqrt{14}}$.

a) Să se calculeze $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2$ și a^2 ;

(5 puncte)

b) Să se calculeze $(a + 2\sqrt{2} - 1)^{2025}$.

(5 puncte)

Rezolvare și barem:

$$\begin{aligned} \text{a) } (\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 &= \sqrt{7}^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 \\ &= 9 - 2\sqrt{14} \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

$$a^2 = 8 \dots\dots\dots 3p$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a &= \left| \underbrace{\sqrt{7} - \sqrt{2}}_{>0} \right| - \left| \underbrace{\sqrt{7} - \sqrt{2}}_{>0} \right| \Rightarrow a = -2\sqrt{2} \dots\dots\dots 2p \\ (-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1)^{2025} &= (-1)^{2025} = -1 \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

B2. Știind că a și b sunt numere reale nenule, să se arate că 0 este rădăcină a ecuației

$$\frac{x+a}{b} + \frac{x+b}{a} = \frac{a}{x+b} + \frac{b}{x+a}. \text{ Să se rezolve ecuația.}$$

(10 puncte)

Rezolvare și barem:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, \text{ deci } 0 \text{ este soluție a ecuației date.} \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{x+a}{b} + \frac{x+b}{a} = \frac{a}{x+b} + \frac{b}{x+a} \Leftrightarrow \left(\frac{x+a}{b} - \frac{a}{x+b} \right) + \left(\frac{x+b}{a} - \frac{b}{x+a} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x(a+b)}{b(x+b)} + \frac{x^2 + x(a+b)}{a(x+a)} = 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow \left[x(x+a+b) \right] \left[\frac{1}{b(x+b)} + \frac{1}{a(x+a)} \right] = 0 \dots\dots\dots 4p$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ sau } x+a+b = 0 \text{ sau } \frac{1}{b(x+b)} + \frac{1}{a(x+a)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ sau } x = -(a+b) \text{ sau } x = -\frac{a^2+b^2}{a+b}, \quad x \neq -a, \quad x \neq -b, \quad a \text{ și } b \text{ numere reale nenule.}$$

.....2p

B3. Să se determine perechile de numere întregi (x,y) , dacă $\frac{x^2+y^2}{x+2y} = 4$.

(5 puncte)

Rezolvare și barem:

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 20 \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\Leftrightarrow 1) \begin{cases} (x-2)^2 = 4 \\ (y-4)^2 = 16 \end{cases}, \quad x+2y \neq 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$2) \begin{cases} (x-2)^2 = 16 \\ (y-4)^2 = 4 \end{cases}$$

$$(x,y) \in \{(0,8), (4,0), (4,8), (-2,2), (-2,6), (6,2), (6,6)\} \dots\dots\dots 1p$$

B4. Să se demonstreze că unul dintre unghiurile determinate de graficele funcțiilor $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = x\sqrt{3} + 1 \text{ și } g(x) = -x\sqrt{3} + 1 \text{ are măsura } 120^\circ.$$

(10 puncte)

Rezolvare și barem:

$$\left\{ A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right) \right\} = Gf \cap OX; \left\{ B(0;1) \right\} = Gf \cap Gg; \left\{ C\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right) \right\} = G_g \cap OX$$

.....6p

$$\triangle OBC : tg \angle OBC = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle OBC = 30^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\triangle OBA : tg \angle OBA = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle OBA = 30^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\angle ABC = 60^\circ \dots\dots\dots 1p$$

Unul dintre unghiurile determinate de graficele funcțiilor are măsura 120°1p

B5. Se consideră dreptunghiul ABCD și punctul E exterior planului (ABC), încât EA este dreapta

perpendiculară pe planul dreptunghiului. Se consideră punctele $P \in EB$, $Q \in EC$ și $R \in ED$, astfel ca

$AP \perp EB$, $AQ \perp EC$ și $AR \perp ED$.

- a) Dacă $AB = a$, $BC = b$ și $EA = c$, să se demonstreze că distanța de la punctul A la planul (BCE) nu depinde de b ;

(5 puncte)

- b) Să se justifice relația $AP \perp EC$ și să se demonstreze că punctele A, P, Q, R sunt coplanare;

(5 puncte)

- c) În ce condiții pentru dreptunghiul ABCD dreapta PR este paralelă cu planul (ABC)?

(5 puncte)

a) $AP \perp BE$, $AP \perp BC$, $BE \cap BC = \{B\}$, $BE, BC \subset (BEC) \Rightarrow AP \perp (BCE)$

$$\Rightarrow d(A; (BEC)) = AP$$

.....3p

$$\Delta ABE : \angle A = 90^\circ \Rightarrow AP = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \text{ nu depinde de } b. \dots\dots\dots 2p$$

b) Din a) $AP \perp (BCE)$, cum $EC \subset (BCE) \Rightarrow AP \perp EC$1p

$$AP \perp EC, AQ \perp EC, AP \cap AQ = \{A\}, AP, AQ \subset (APQ) \Rightarrow EC \perp (APQ) \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

$$AR \perp DE, DE \perp DC (T3 \perp), DE, DC \subset (DEC), AD \perp DC \xrightarrow{R_2 T3 \perp} AR \perp (DEC), \text{ cum } EC \subset (DEC) \Rightarrow AR \perp EC \quad (2)$$

Din (1) și (2), rezultă că A, P, Q, R coplanare.....3p

c) $c^2 = ER \cdot DE \Rightarrow ER = \frac{c^2}{DE}$, $c^2 = EP \cdot BE \Rightarrow EP = \frac{c^2}{BE}$

$$\Rightarrow \frac{ER}{DE} = \frac{c^2}{DE^2}, \frac{EP}{BE} = \frac{c^2}{BE^2} \dots\dots\dots 2p$$

$$RP \parallel BD \Leftrightarrow \frac{ER}{DE} = \frac{EP}{BE} \Leftrightarrow \frac{c^2}{DE^2} = \frac{c^2}{BE^2} \Leftrightarrow BE^2 = DE^2 \Leftrightarrow c^2 + a^2 = c^2 + b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

.....3p

Succes!

Notă: Timpul rezervat redactării lucrării - 150 minute.

Type equation here.